Centre Universitaire MAYOTTE

ANNÉE 2016–2017 **LICENCE MG L2**

Examen d'Analyse numérique matricielle
DUREE : 3 Heures

Exercice 1

Dans ce qui suit, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices d'ordre n, c'est-à-dire les matrices carrées de dimension $n \times n$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Donner les définitions de A inversible, symétrique, hermitienne et orthogonale.
2) Donner les définitions de A unitaire, normale, diagonale, triangulaire supérieure et triangulaire inférieure.
3) Vérifier ces définitions sur les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & i \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que A est symétrique définie positive.
2) Réaliser la décomposition de Cholesky de la matrice A.
3) Résoudre, en utilisant le résultat de la question précédente, $Ax = b$ où b est égale à la transposée de $(0, 0, 96)$.

Exercice 3

Faire la décomposition LU de A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice 4

1. Rappellez en quoi consiste la méthode Gauss-Seidel pour la résolution itérative du système $Ax = b$.
2. Rappellez en quoi consiste la méthode Jacobi pour la résolution itérative du système $Ax = b$.
3. Rappellez également les conditions de convergence de ces deux méthodes.
4. Montrer que, pour

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

la méthode de Gauss-Seidel converge alors que la méthode de Jacobi diverge.

Exercice 5

Soit A une matrice carrée d'ordre $n > 0$. Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, on note $||.||_p$ la norme matricielle

$$||A||_p = \sup_{||x||_p \neq 0} \frac{||Ax||_p}{||x||_p} = \sup_{||x||_p = 1} ||Ax||_p = \sup_{||x||_p \leq 1} ||Ax||_p$$

1) Montrer que

$$||A||_1 = \max \sum_{j=1\dots n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

$$||A||_\infty = \max \sum_{i=1\dots n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

2.a) Soit B une matrice réelle et symétrique. Montrer que pour tout $x \neq 0$ et dans $\mathbb{R}^n$,

$$\lambda_{min}(B) \leq \frac{(Bx, x)}{||x||_2^2} \leq \lambda_{max}(B),$$

où $\lambda_{min}(B)$ désigne la plus petite valeur propre de B et $\lambda_{min}(B)$ la plus grande valeur propre de B. Noter aussi que (Bx, x) désigne le produit scalaire entre Bx et x.

2.b) On pose $B = A'A$ où A' désigne la transposée de A.
Vérifiez que $B = A'A$ est symétrique et en déduire que

$$||A||_2 \leq \sqrt{\rho(A'A)}$$

où A est une matrice réelle et ρ est le rayon spectral.

Centre Universitaire
MAYOTTE

Centre Universitaire de Formation et de Recherche de Mayotte

Année Universitaire 20………. / 20……….

2 ☐

Nom : …[redacted]……………

Né(e) le : [redacted]……………

Diplôme : ……………………………………………………

Prénom : ……………………………………

Numéro d'étudiant : ……………………………………

Signature :

Code Matière : ……………………………………………

Intitulé Matière : Analyse Numerique matricielle

Nombre d'intercalaires : ……………………………

NOTE : ………. / ………. 12/20

Il est interdit de signer à la fin de la composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Exercice 1 4pts Définitions

1) A inversible :

~~Soit~~ Définition : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que :

$AB = BA = I_n$

$\Rightarrow \det(A) \neq 0$

A symétrique :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est symetrique si $A^T = A$ avec A^T la transposée de A.

A est hermitienne :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est dite hermitienne si $A^H = A$ avec A^H la transconjugué de A.

A orthogonale :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est dite orthogonale si

$AA^T = A^TA = I_n$

avec $A^T = A^{-1}$

2) A unitaire :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est unitaire si

$AA^H = A^H A = I_n$

avec $A^H = A^{-1}$

A normale :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est dite normale si

$AA^H = A^H A$.

A diagonale :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est dite une matrice diagonale ~~s'il~~ si $a_{ij} = 0$ dès que ~~A~~ $i \neq j$

A triangulaire supérieure :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est une matrice triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ dès que $i > j$.

A triangulaire inférieure :
soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, A est dite matrice triangulaire inférieur si $a_{ij} = 0$ dès que $i < j$.

3)
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix} = A$$

$A^T = A$ donc A est symetrique

$$A^H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix} = A$$

$A^H = A$ donc A est hermitienne.

Verifions que A et enversible :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & -2 & -6 \end{vmatrix}$$

$$\det(A) = 2\begin{vmatrix} -8 & -2 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 2(-8 \times -6 - (-2 \times -2))$$

$$= 2(48 - 4) = 2(44) = 88 \neq 0$$

donc A et enversible.

$$AA^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 68 & 100 \\ 68 & 116 & 144 \\ 100 & 144 & 280 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 68 & 100 \\ 68 & 116 & 144 \\ 100 & 144 & 280 \end{pmatrix}$$

$A^T = A^{-1}$ verifions le determinant de A.

$\det(A) = 88 \neq 0$ donc A inversible

Par conséquent ; $AA^T = A^T A = I_n$
A est orthogonale.

* AA^H or $A^H = A$ donc

$$AA^H = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 68 & 100 \\ 68 & 116 & 144 \\ 100 & 144 & 280 \end{pmatrix}$$

$$A^H A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 68 & 100 \\ 68 & 116 & 144 \\ 100 & 144 & 280 \end{pmatrix}$$

$AA^H = A^H A = I_n$ car $A^H = A^{-1}$ et
$\det(A) = 88 \neq 0$
donc A est unitaire.

* $A^H A = AA^H$ d'après le précédent
donc également A est normale

Centre Universitaire
MAYOTTE

Centre Universitaire de Formation et de Recherche de Mayotte

Code matière : ....

Numéro d'étudiant : ....

Intitulé : ....

Exercice 1 suite

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 0 & 10 \\ 6 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

A n'est pas diagonale car
$a_{12} = 4 \neq 0$, $a_{13} = 6 \neq 0$ $a_{23} = 10 \neq 0$
dès que $i \neq j$

A n'st pas triangulaire supérieure car
$a_{21} = 4 \neq 0$, $a_{31} = 6 \neq 0$ $a_{32} = 10 \neq 0$
dès que $i > j$

A n'est pas triangulaire inférieure car
$a_{12} = 4 \neq 0$, $a_{13} = 6 \neq 0$, $a_{23} = 10 \neq 0$
dès que $i < j$

* $$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verifions ~~que~~ si B est inversible.

$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times (0 \times 0 - 1 \times 1)$
$= -1$

$\det(B) = -1 \neq 0$

donc B est inversible.

* $B^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq B$ donc B n'est symétrique.

$B^H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq B$ donc B n'est pas hermitienne

* $B B^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^T B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B B^T = B^T B = I_n$ car $B^T = B^{-1}$ et B est inversible car $\det(B) \neq 0$

Par conséquent, B est ~~unitaire~~ orthogonale.

* $B B^H = B^H B = I_n$ car $B^H = B^T$ et vue précédement
$B B^T = B^T B = I_n$

Par conséquent, B est unitaire.

$$BB^H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^H B^{\#} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$BB^H = B^H B$ donc B est normale.

* B n'est pas triangulaire supérieure car $b_{31} = 1 \neq 0$ dès que $i > j$

B n'est pas ~~tj~~ triangulaire inférieure car $b_{12} = 1 \neq 0$ et $b_{23} = 1 \neq 0$ dès que $i < j$

B n'est pas diagonale car $b_{31} = 1 \neq 0$ $b_{12} \neq 0$ dès que $i \neq j$

* $C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & i \end{pmatrix}$

$\det(C) = \begin{vmatrix} 1 & -i \\ i & i \end{vmatrix} = 1 \times i - (-i \times i)$
$= i1 \neq 0$

donc C inversible.

* $C^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & i \end{pmatrix} \neq C$ donc C n'est pas symétrique.

$C^H = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ +i & -i \end{pmatrix} \neq C$ donc C n'est pas hermitienne.

$$C^T C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & +i \\ -i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ i+1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C C^T = \begin{pmatrix} 1 & +i \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i-1 \\ -i-1 & -2 \end{pmatrix}$$

$C^T C \neq C C^T$ = A n'est pas diagonale et ~~normale~~.

$$C^H C = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1-i \\ i+1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C C^H = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -i-1 \\ i-1 & 2 \end{pmatrix}$$

$C^H C \neq C C^H$ donc C n'est pas unitaire et normale.

C n'est pas diagonale car $c_{12} = -i \neq 0$ dès que $i \neq j$

C n'est pas triangulaire supérieure car $c_{21} = i \neq 0$ dès que $i > j$
de même C n'est pas triangulaire inférieure car $c_{12} = -i \neq 0$ dès que $i < j$.

[redacted]

Centre Universitaire
MAYOTTE

Centre Universitaire de Formation et de Recherche de Mayotte

Année Universitaire 20........ / 20........

Session 1 ☐ / 2 ☐

Nom : ....

Prénom : ....

Né(e) le : ....

Numéro d'étudiant : ....

Diplôme : ....

Signature :

Code Matière : ....

Intitulé Matière : ....

Nombre d'intercalaires : ....

NOTE : .... / ....

<u>Il est interdit de signer à la fin de la composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.</u>

<u>exercice 1</u> suite

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times 1 - (1+i)(1-i)$$

$$= 1 - (1^2 - i^2) = 1 - 1 - 1 = -1 \neq 0$$

donc

D est inversible

$D^T = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \neq D$ donc D n'est pas symétrique

$D^H = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} = D$ donc D est hermitienne

$D D^T = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2i & 2 \\ 2 & 1-2i \end{pmatrix}$

$D^T D = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2i & 2 \\ 2 & 1+2i \end{pmatrix}$

$D^T D \neq D D^T$ donc D n'est pas orthogonale

$D^H D = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 3 \end{pmatrix}$

$D D^H = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2+2i \\ 2-2i & 3 \end{pmatrix}$

$D^H D = D D^H = I_n$ car A est inversible et $D^H = D^{-1}$

donc D est unitaire et normale car $D^H D = D D^H$

D n'est pas diagonale car
$d_{12} = 1+i \neq 0$ dès que $i \neq j$

D n'est pas triangulaire supérieure car
$d_{21} = 1-i \neq 0$ dès que $i > j$

D^* n'est pas triangulaire ~~sup~~ inférieure
car $d_{12} = 1+i \neq 0$ dès que $i < j$

Exercice 2:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{pmatrix}$$

1) $A^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{pmatrix} = A$ donc

A est symétrique.

$(Ax, x) \geq 0$ à montrer et 0_{11}

$(Ax, x) = 0$

$(Ax, x) = x^T \cdot Ax$ avec $x \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

$x^T = (x_1, x_2, x_3)$

$$Ax = \begin{pmatrix} 4x & 2x & 2x \\ 2x & 10x & 7x \\ 2x & 7x & 21x \end{pmatrix}$$

2) Décomposition de Cholesky de A

$A = BB^T$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \qquad B^T = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} \\ 0 & b_{22} & b_{32} \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix}$$

$$BB^T = \begin{pmatrix} b_{11}^2 & b_{11}b_{21} & b_{11}b_{31} \\ b_{21}b_{11} & b_{21}^2+b_{22}^2 & b_{21}b_{31}+b_{22}b_{32} \\ b_{31}b_{11} & b_{31}b_{21}+b_{32}b_{22} & b_{31}^2+b_{32}^2+b_{33}^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 10 & 7 \\ 2 & 7 & 21 \end{pmatrix} = A$$

$b_{11}^2 = 4 \Rightarrow \boxed{b_{11} = 2}$

$b_{11} b_{21} = 2 \Rightarrow \boxed{b_{21} = 1}$

$b_{11} b_{31} = 2 \Rightarrow \boxed{b_{31} = 1}$

$b_{21}^2 + b_{22}^2 = 10 \Rightarrow 1^2 + b_{22}^2 = 10 \Rightarrow \boxed{b_{22} = 3}$

$b_{21} b_{31} + b_{22} b_{32} = 7$

$\Rightarrow 1 \times 1 + 3 b_{32} = 7 \Rightarrow \boxed{b_{32} = 2}$

$b_{31}^2 + b_{32}^2 + b_{33}^2 = 21$

$\Rightarrow 1^2 + 2^2 + b_{33}^2 = 21 \Rightarrow b_{33}^2 = 21 - 5$

$b_{33}^2 = 16 \Rightarrow \boxed{b_{33} = 4}$

Centre Universitaire
MAYOTTE

Centre Universitaire de Formation et de Recherche de Mayotte

Code matière : .... Intitulé : ....

Numéro d'étudiant : ....

Exercice 2 suite

2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

1

3) $Ax = b \Leftrightarrow BB^T x = b \Leftrightarrow$ ~~$Bx =$~~ $By = b$ et $B^T z = y$

$B^T x = B^{-1} b$

$B^{-1} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

C'est long

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -\frac{1}{24} & -\frac{4}{24} & +\frac{6}{24} \end{array}\right)$

$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{24} & -\frac{4}{24} & \frac{6}{24} \end{pmatrix}$ et $B^{-1} b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{576}{24} \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_3 = \frac{576}{24} \end{cases}$$

$x_3 = \frac{576}{24} \times \frac{1}{4} = \frac{576}{96} \cancel{=} = \frac{96 \times 6}{96}$

$= 6$

$\boxed{x_3 = 6}$

$3x_2 + 2 \times 6 = 0$

$3x_2 = -12$

$\boxed{x_2 = -4}$

$2x_1 + \cancel{x} - 4 + 6 = 0$

$2x_1 + 2 = 0$

$2x_1 = -2$

$\boxed{x_1 = -1}$

Les solutions sont

$x = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$ ✓ 1

Exercice 3

Decomposition LU de A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Etape 1

$$M^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = M^{(1)} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

Etape 2

$$M^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = G^{(2)} A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

$$L = \left(G^{(1)}\right)^{-1} \left(G^{(2)}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L$$

Vérification

$LU = A$

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & -1 & 5 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -9 & 4 \end{pmatrix} = A$$

3

[redacted]

Centre Universitaire
MAYOTTE

Centre Universitaire de Formation et de Recherche de Mayotte

Année Universitaire 20.......... / 20.......... Session 1 ☐ / 2 ☐

Nom : .... Prénom : ....

Né(e) le : .... Numéro d'étudiant : ....

Diplôme : .... Signature :

Code Matière : .... Intitulé Matière : ....

Nombre d'intercalaires : ....

NOTE : .... / ....

Il est interdit de signer à la fin de la composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Exercice 4

1) Resolution de $Ax = b$ Gauss - Seidel

on $A = D - N$

avec ~~avec~~ $G = \mathcal{M}^{-1}N$, $N = E + L$ et $M = D - E$

Et la suite iterative

2) Methode de Jacobi $Ax = b$

$A = D - E - L$ $J = D^{-1}(D - A)$

avec

$$\begin{cases} D = \text{diag}(A) \\ E = \text{triangulaire strictement superieure} \\ L = \text{triangulaire strictement inferieur} \end{cases}$$

Et la suite récurrente ?

N° : 17 / 19

3)

Par Gauss - Seidel

Le sytome $Ax = b$ converge si

$\rho(D^{-1}(D-A)) < 1$

Et par Jacobi, $Ax = b$ converge si $\rho(P^{-1}N) < 1$

avec

$P = D$ et $N = E+L$

1

4)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Etudions le methode de jacobi

$A = D - E - L$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ensuite on vas etudier la convergence

$\rho(P^{-1}N) < 1$ dont $P = D$ et $N = E+L$

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}N = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(P^{-1}N - x I_n) = \cancel{\begin{pmatrix} -x & \frac{1}{2}-x & -\frac{1}{2}-x \\ 1-x & -x & -1-x \\ \frac{1}{2}-x & & \end{pmatrix}}$$

$$= \begin{vmatrix} -x & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -x \end{vmatrix}$$

$$= -x \begin{vmatrix} -x & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -x \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -x \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -x & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

$$= -x\left(+x^2 - \frac{1}{4}\right) - \left(-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x\right)$$

$$= -x^3 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{4}x$$

$$= -x^3 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}$$