Examen final

Exercice 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x;y) = e^{-x^2 y}$$

On note (C) le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$.

On veut résoudre le problème (P) : optimiser f sous la contrainte $x^2 + y^2 \leq 1$.

On note Δ le domaine des contraintes.

1) Justifier que f admet un maximum et un minimum globaux sur Δ.
2) Montrer que f admet une infinité de points critiques sur l'intérieur de Δ ; les déterminer et calculer leur image par f. Ces points critiques correspondent-il à des optima locaux de f ? Justifier la réponse.
3) a) Démontrer que sur (C), f s'identifie à la fonction $\varphi : y \mapsto e^{y^3-y}$.
   b) Optimiser f sur (C).
4) En déduire la solution du problème (P).

1) Δ est le domaine fermé borné de frontière le cercle de centre $(0;0)$ et de rayon 1 : c'est un compact de $\mathbb{R}^2$. Comme f est continue, elle admet donc sur ce compact un maximum et un minimum globaux.

2) Pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = -2xye^{-x^2y} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = -x^2e^{-x^2y}$$

Par conséquent :

$$(x;y) \text{ critique } \Leftrightarrow x = 0$$

Pour tout $b \in \mathbb{R}$, $M_b = (0;b)$ est un point critique de f sur $\mathbb{R}^2$ et il est intérieur à Δ pour tout $b \in [-1;1]$. Donc pour tout $b \in]-1;1[$, $M_b = (0;b)$ est un point critique de f intérieur à Δ, avec $f(M_b) = e^0 = 1$.

Par ailleurs : $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^* \times]0;+\infty[$, $f(x;y) < 1 = f(M_b)$ (car $-x^2y < 0$) et $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^* \times]-\infty;0[$, $f(x;y) > 1 = f(M_b)$ (car $-x^2y > 0$). Donc f n'admet pas d'optimum local en M_b, quel que soit $b \in]-1;1[$.

3) a) Pour tout $(x;y) \in (C)$, $f(x;y) = e^{-(1-y^2)y} = e^{y^3-y} = \varphi(y)$ avec $y \in [-1;1]$

b) Pour tout $y \in [-1;1]$, $\varphi'(y) = (3y^2-1)e^{y^3-y}$. On en déduit le tableau de variations :

y	-1		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$		1
$\varphi'(y)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
φ	1	↗	$e^{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$	↘	$e^{\frac{-2}{3\sqrt{3}}}$	↗	1

φ admet sur (C) un minimum en $1/\sqrt{3}$ qui vaut $e^{\frac{-2}{3\sqrt{3}}}$ et un maximum en $-1/\sqrt{3}$ qui vaut $e^{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$.

4) Il résulte des questions précédentes que f admet un minimum global en $\left(\sqrt{2/3}\,;1/\sqrt{3}\right)$ et en $\left(-\sqrt{2/3}\,;1/\sqrt{3}\right)$ qui vaut $e^{\frac{-2}{3\sqrt{3}}}$ et un maximum global en $\left(\sqrt{2/3}\,;-1/\sqrt{3}\right)$ et en $\left(-\sqrt{2/3}\,;-1/\sqrt{3}\right)$ qui vaut $e^{\frac{2}{3\sqrt{3}}}$ (les deux calculs de la valeur de x résultant dans chaque cas de la relation $x^2 = 1 - y^2$).

Exercice 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$f(x;y;z) = xy - z$$

On cherche à résoudre le problème (P) : optimiser f sous les contraintes $\begin{cases} y \leq 0 \\ x + z \leq 0 \end{cases}$.

1) Ecrire la fonction lagrangien ℓ associée au problème (P).
2) Démontrer qu'il existe un unique quintuplet $(x;y;z;\mu_1;\mu_2)$ de réels satisfaisant aux conditions nécessaires du premier ordre de Karush-Kuhn-Tucker et le préciser.

Centre Universitaire MAYOTTE

Centre Universitaire de Formation et de Recherche de Mayotte

Année Universitaire 20.16... / 20.17... Session 1 ☒ / 2 ☐

Nom : [redacted] Prénom : [redacted]

Né(e) [redacted] Numéro [redacted]

Diplôme : L3 MG Signature : [redacted]

Code Matière : UE 603 Intitulé Matière : optimisation

Nombre d'intercalaires : ....

NOTE : 14/20

Il est interdit de signer à la fin de la composition ou d'y mettre un signe quelconque pouvant indiquer sa provenance.

Exercice 2 : $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x;y;z) \mapsto xy - z$

$(P) : \begin{cases} y \leq 0 \\ x+z \leq 0 . \end{cases}$

1 1) le lagrangien associée au (P) est

$$\boxed{\ell(x;y;z;\mu_1;\mu_2) = \underbrace{xy - z}_{f(x;y;z)} + \mu_1 \underbrace{y}_{g_1(x;y;z)} + \mu_2 \underbrace{(x+z)}_{g_2(x;y;z)}}$$ bien

2) Conditions du 1^er^ ordre KKT

$$\begin{cases} \mu_1 \text{ et } \mu_2 \text{ de même signe} \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x;y;z;\mu_1^*;\mu_2^*)=0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y}(x;y;z;\mu_1^*;\mu_2^*)=0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z}(x;y;z;\mu_1^*;\mu_2^*)= \\ \mu_1^* g_1(x;y;z)=0 \\ \mu_2^* g_2(x;y;z)=0 \\ g_1(x;y;z)\leq 0 \\ g_2(x;y;z)\leq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mu_1 \text{ et } \mu_2 \text{ de même signe} \\ y+\mu_2^*=0 \\ x+\mu_1^*=0 \\ -1+\mu_2^*=0 \\ \mu_1^* y=0 \\ \mu_2^*(x+z)=0 \\ y\leq 0 \\ x+z\leq 0 \end{cases}$$

oui

3

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \mu_1^* \text{ et } \mu_2^* \text{ de même signe} \\ \mu_2^*=1 \\ y=-1 \\ -\mu_1^*=0 \Leftrightarrow \mu_1^*=0 \Rightarrow \\ \cancel{x+z\neq 0} \\ x=0 \text{ car } \mu_1=0 \\ 0+z=0 \Leftrightarrow z=0 \end{cases}$$

donc ici, le quintuplet $(0;-1;0;0;1)$ est bien l'unique solution satisfaisant les conditions du 1ère ordre KKT.

et qui est un minimum (car $\mu_2>0$) (à prouver).

3) ici, $a=(0;-1;0)$ regulier ?

pour que a soit regulier, on a hi active et vecteurs gradients $\nabla_a h_i$ et $\nabla_a g_j$ $\forall j \in J$ (active) soit linéairement indépendants.

ici, il n'y a pas les conditions hi

ici, $g_1(x;y;z)=y \Rightarrow g_1(0;-1;0)=-1\neq 0$.

donc $g_1(x;y;z)$ n'est pas active.

$g_2(a)=0+0=0$, donc $g_2(x;y;z)$ est active. bien

avec $\partial_{(x;y;z)} g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ indépendant linéairement (seul)

$J_{(x;y;z)} g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

ici a et bien regulier.

4) $C_a = \{ Y \in \mathcal{M}_{(3;1)} ; J_a f \, Y \leq 0 ; J_a g_j \, Y \leq 0 \ \forall j \in [1;2] \}$

$J_{(x;y;z)} f = \begin{pmatrix} y & x & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow J_a f = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

$J_a f \, Y \leq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \leq 0$.

$\Leftrightarrow -u - w \leq 0 \Leftrightarrow u + w \geq 0 \Leftrightarrow w \geq -u$.

$J_a g_1 Y \leq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \leq 0$ non pertinent

1 $\Leftrightarrow v \leq 0$. (g_1 non active)

$J_a g_2 Y \leq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \leq 0$.

$\Leftrightarrow u + w \leq 0 \Leftrightarrow w \leq -u$

$C_a = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3;1)} ; u + w \geq 0 ; v \leq 0 ; u + w \leq 0 \right\}$

$C_a = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3;1)} ; u + w = 0 ; \cancel{v \leq 0} \ v \in \mathbb{R} \right\}$ oui

5) La Matrice pseudo Hessienne de l en $(x;y;z)$

$L(x;y;z;\mu_1^*;\mu_2^*) = H_{(x;y;z)} f + \mu_1^* \underbrace{H_{(x;y;z)} g_1}_{0} + \mu_2^* \underbrace{H_{(x;y;z)} g_2}_{0}$

ici $H_{(x;y;z)} g_1 = H_{(x;y;z)} g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (car contrainte affine en derivant 2 fois que ça soit par la même variable ou 2 variable differents on a 0.

donc $L(x;y;z;\mu_1^*;\mu_2^*) = H_{(x;y;z)} f$ $\forall (x;y;z) \in \mathbb{R}^3$

$\frac{\partial f}{\partial x}(x;y;z) = y$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x;y;z) = x$; $\frac{\partial f}{\partial z}(x;y;z) = -1$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x;y;z) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial y^2}(x;y;z) = 0$; $\frac{\partial f}{\partial z^2}(x;y;z) = 0$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x;y;z) = 1 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x;y;z)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x;y;z) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x;y;z)$

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x;y;z) = 0 = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x;y;z)$

$\forall (x;y;z) \in \mathbb{R}^3$ donc

1,5 $\boxed{H_{(x;y;z)} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = L(x;y;z;\mu_1^*;\mu_2^*)}$ oui

6) $\forall Y = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in C_a \setminus \{0\}$, ${}^tY L(a;\mu_1^*;\mu_2^*) Y$ de quel signe ?

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

1 $= uv + uv = 2uv$, mais sur C_a on a $u + w = 0 \Leftrightarrow u = -w$

$\Leftrightarrow {}^tY L Y = -2wv$ avec $v \leq 0$ on a ${}^tY_{(a;\mu_1^*;\mu_2^*)} Y > 0$ car $v \neq 0 \in C_a \setminus \{0\}$

donc la nature de a est un non ~~minimum~~ local sous les contrainte (P)

Centre Universitaire
MAYOTTE

Centre Universitaire de Formation et de Recherche de Mayotte

Code matière : UE 603 Intitulé : optimisation
Numéro d'étudiant : [redacted]

7) ici les contrainte sont affines, mais

$$H_{(x,y,z)}\, g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = H_{(x,y,z)}\, g_2$$

donc matrice nulle de son espace propre 0 donc les contrainte ne sont ni convexe, ni concave en particulier (convexe)

et de plus $H_{(x,y,z)} f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\chi_{Hf} = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -1 & X & 0 \\ 0 & 0 & X \end{vmatrix} = \cancel{}\ 0$ donc f aussi n'est ni concave ni convexe

ceci n'est pas un argument suffisant pour conclure négativement

donc f n'admet ~~pas~~ aucun optimum global sous les contraintes considérées.

Voir le corrigé

Exercice 1 :

$$f(x,y) = e^{-x^2 y} \qquad \left.\begin{array}{l} (C) : x^2+y^2 = 1 \\ (P) : x^2+y^2 \leq 1 \end{array}\right\} \Delta$$

1) ici Δ est compact et de plus f est continue (composé de f et continue), donc f admet un maximum et un minimum globaux sur Δ.

1

2) Etude sur $\mathring{\Delta} = \text{int}(\Delta)$:

$(x;y)$ critique $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f(x;y)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2xy\, e^{-x^2 y} = 0 \\ -x^2 e^{-x^2 y} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2xy = 0 \\ -x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

1,5 donc ici f admet une infinité de points critiques car ~~$\varnothing$~~ $\forall$, $y \in \mathbb{R}$ et $x = 0$ est critique ($y \in \mathbb{R}$, infinité)
couple

et ces points critiques sont $\{(0;y) ; y \in \mathbb{R}\}$ il faut respecter la contrainte

et $f(0;y) = e^{-0^2 y} = e^0 = 1$ par f
$f(0;y) = 1$ leur image vaut 1

voir le corrigé

Ces points critiques ne correspondent pas à des optima locaux de f car $\{(0;y) ; y \in \mathbb{R}\} \notin \mathring{\Delta}$ ni a Δ (dans Δ, on a $y \leq 0$).
donc on peut peut être dire que $\forall y \in \mathbb{R}^*_-$, $(0;y) \in \mathring{\Delta}$
d'où peut être des optima locaux.
mais ici $\forall y \in \mathbb{R}$, on a $(0;y) \notin \mathring{\Delta}$ ni à Δ
donc ces points critiques ne correspondent pas à des optima locaux de f.

3) a) Sur (C) : $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - y^2$

0,5 on a : ~~$f(x;y) =$~~
$f(x;y) = e^{-(1-y^2)y} = \boxed{e^{y^3 - y} = \varphi(y)}$

donc f s'identifie bien à $\varphi(y)$

2) Etude sur $\mathring{\Delta} = \text{int}(\Delta)$:

$(x;y)$ critique $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x;y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x;y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2xy\, e^{-x^2 y} = 0 \\ -x^2 e^{-x^2 y} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2xy = 0 \\ -x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y \in \mathbb{R} \end{cases}$

1,5 donc ici f admet une infinité de points critiques car $\forall y \in \mathbb{R}$ et $x = 0$ est critique ($y \in \mathbb{R}$, infinité)
couple

et ces points critiques sont $\{(0;y) ; y \in \mathbb{R}\}$ il faut respecter la contrainte

et $f(0;y) = e^{-0^2 y} = e^0 = 1$ par f
$f(0;y) = 1$ leur image vaut 1

Ces points critiques ne correspondent pas à des optima locaux de f car $\{(0;y) ; y \in \mathbb{R}\} \notin \mathring{\Delta}$ ni a Δ (dans Δ, on a $y \leq 0$)

voir le corrigé

donc on peut peut être dire que $\forall y \in \mathbb{R}_-^*$, $(0;y) \in \mathring{\Delta}$ d'où peut être des optima locaux.

mais ici $\forall y \in \mathbb{R}$ on a $(0;y) \notin \mathring{\Delta}$ ni à Δ donc ces points critiques ne correspondent pas à des optima locaux de f.

3) a) Sur (C) : $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - y^2$

0,5 on a : ~~$f(x;y) =$~~ $f(x;y) = e^{-(1-y^2)y} = \boxed{e^{y^3 - y} = \varphi(y)}$

donc f s'identifie bien à $\varphi(y)$

N° : 6/8

b) d'après a) f s'identifie à $\varphi(y) = e^{y^3-y}$.

$\varphi'(y) = (3y^2-1)e^{y^3-y} = 3y^2 e^{y^3-y} - e^{y^3-y}$.

ici $e^{y^3-y} > 0$, donc $\varphi'(y) = 0 \Leftrightarrow 3y^2-1 = 0$

$\Leftrightarrow 3y^2 = 1$

bien $\Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$.

1,5

y	~~$-\infty$~~ -1		$-\sqrt{\frac{1}{3}}$		$\sqrt{\frac{1}{3}}$		~~$+\infty$~~ 1
$\varphi'(y)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\varphi(y)$	~~0~~ 1	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}} \simeq 1,47$	$\searrow$	$e^{-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}} \simeq 0,68$	$\nearrow$	~~$+\infty$~~ 1

$\lim_{y\to-\infty} e^{y^3-y}$ $\begin{cases} \lim_{y\to-\infty} y^3 = -\infty \\ e^{-\infty} \to 0 \end{cases}$

$\varphi\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = e^{\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^3 + \sqrt{\frac{1}{3}}} = e^{-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{1}{3}}} = e^{\sqrt{\frac{1}{3}}\left(1-\frac{1}{3}\right)} = e^{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}} \simeq 1,47$

$\varphi\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right) = e^{\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3}}} = e^{\sqrt{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}-1\right)} = e^{-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}} \simeq 0,68$

et $\lim_{y\to+\infty} y^3-y = \lim_{y\to+\infty} y^3 = +\infty$, $e^{+\infty} \to +\infty$

~~φ a un minimum de~~

quand ~~; $y \to -\infty$ $\frac{2}{3}$ qui vaut 0~~

Non prise en compte de la contrainte : $y \in [-1;1]$.

~~et pas de maximum car $\lim_{y\to+\infty} \varphi(y) = +\infty$~~

$x^2 = 1-y^2$

$x = \sqrt{1-y^2}$ quand $y \to -\infty$

$x = \sqrt{-\infty}$ pas défini car $\sqrt{x} \geq 0$

~~d'où f admet un minimum global en $(0;y)$, $y \to -\infty$ qui vaut 0 et f n'admet de maximum sous la contrainte (C) : $x^2+y^2=1$~~

J'ai pris $x=0$ pour $(0;y)$, $y\to-\infty$ car on a eu que les cdt q sont les $(0;y)$ et que ce sont peut être des optimums pour $y \to -\infty$, donc cela correspond.

4) $(P) = x^2+y^2 \leq 1 \Leftrightarrow x^2+y^2 < 1$ et $x^2+y^2 = 1$
(intérieur) (frontière)

~~a~~ on a déjà vu qu'à l'intérieur de $\mathring{\Delta}$
c'est-à-dire $x^2+y^2<1$, ~~on~~ il n'y a des optima locaux de f
et on vient de voir que sur $(C) : x^2+y^2=1$
f admet un minimum en $\{(0;y) ; y \to -\infty\}$

J'ai pris $x=0$ (déjà expliqué avant (donné))

$x = \sqrt{1-y^2}$ $y \to -\infty$

$x = \sqrt{-\infty}$ pas définie

si $x=0$, $y = \pm 1$ sur (C).

qui vaut 0 et f n'a pas de maximum.

À revoir avec la prise en compte $y \in [-1,1]$

Comme ~~$\mathring{\Delta}\cap(C)$~~ $\mathring{\Delta} \cup (C) = (P)$ c'est-à-dire $x^2+y^2<1$ $(\mathring{\Delta})$
et $x^2+y^2=1$ (C) nous donne $x^2+y^2 \leq 1$ (P)
on a donc f admet ~~en~~ un minimum en $\{(0;y) ; y \to -\infty\}$
qui vaut 0 et f n'admet pas de maximum
sous la contrainte ~~P~~ $x^2+y^2 \leq 1$ d'où voilà
la solution du problème (P).